

3 問1 $a_2=3, a_3=\frac{5}{3}$

問2 $a_n = -\frac{b_n+2}{b_n-1}$

問3 問2の式より, $a_{n+1} = -\frac{b_{n+1}+2}{b_{n+1}-1}$

これらを $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}$ に代入して,

$$-\frac{b_{n+1}+2}{b_{n+1}-1} = 1 - 2 \cdot \frac{b_n-1}{b_n+2}$$

これを整理して, $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n$ (等比数列)

$b_1 = \frac{a_1-2}{a_1+1} = -\frac{1}{2}$ であるから,

$$b_n = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

問4 $a_n = -\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

問5 $t = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ とおくと,

$$a_n = -\frac{t+2}{t-1} = -\frac{(t-1)+3}{t-1} = -1 - \frac{3}{t-1}$$

n は自然数であるから, $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{4}$

$$\therefore 1 \leq a_n \leq 3$$

よって, 最大値 3, 最小値 1

問6 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

4 問1 定義域 $x \geq -1$

$x=0$ のとき極小値 0 , $x=-\frac{2}{3}$ のとき極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

x	-1	$\dots$	$-\frac{2}{3}$	$\dots$	0	$\dots$
y'		$+$	0	$-$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$\begin{aligned} \text{問2} \quad S &= \int_{-1}^0 -x\sqrt{x+1} dx = \int_0^1 (1-t)\sqrt{t} dt \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\text{問3} \quad V = \pi \int_{-1}^0 x^2(x+1) dx = \frac{\pi}{12}$$

問4 $y = x + k \dots\dots ①$

k は実数だから、①は傾きが1の直線である。

$f(x) = x\sqrt{x+1}$ とおくと、 $f'(x) > f'(0) = 1$ である。

右のグラフより、方程式 $x+k = |x|\sqrt{x+1}$ の実数解がちょうど2個になるのは、直線①が図の直線 l のように接線になるか、直線 m のようになる場合である。

接点の x 座標を t とおくと、

$$-\frac{3t+2}{2\sqrt{t+1}} = 1 \dots\dots ② \quad t+k = t\sqrt{t+1} \dots\dots ③$$

が成り立つ。よって、 $t = -\frac{8}{9}$, $k = \frac{32}{27}$

以上より、実数解がちょうど2個になる k は、 $k = \frac{32}{27}$, $0 < k < 1$

