２０２５年度　一般選抜試験問題【マーク＋記述 一般①】

数　学

（90 分）

注意事項

① 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。

② 解答にはＨＢまたはＢの黒鉛筆（シャープペンシルはＨＢまたはＢの芯であれば使用可）を使用しなさい。

③ 問題は、$\boxed{1}$～$\boxed{5}$の計５題あります。$\boxed{1}$～$\boxed{3}$はマーク式解答問題、$\boxed{4}$、$\boxed{5}$は記述式解答問題です。

④ $\boxed{1}$～$\boxed{3}$のマーク式解答問題３題を必須解答、$\boxed{4}$または$\boxed{5}$の記述式解答問題のいずれか１題を選択し、合計４題解答すること。
ただし、第１～第３志望いずれかに、理工学科 数理科学専攻、電気電子情報工学専攻、機械システム工学専攻を含む場合は、必ず$\boxed{5}$を解答すること。

⑤ $\boxed{1}$～$\boxed{3}$は、**マーク式の解答用紙**にマーク式で解答しなさい。氏名、受験番号、科目を記入する欄と受験番号をマークする欄に必要事項を記入してから、解答を始めること。裏表紙にマーク式解答に関する注意事項を記載していますので、必ず裏表紙の「数学解答上の注意」を読みなさい。

⑥ $\boxed{4}$または$\boxed{5}$は、**記述式の解答用紙**に記述式で解答しなさい。氏名、受験番号を記入する欄に必要事項を記入してから解答を始めること。

⑦ 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を高くあげて監督者に知らせなさい。

数　　学

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

問1 2次方程式 $x^2-\sqrt{7}\,x+1=0$ の2個の解のうち，大きい方を α とする。

このとき $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\boxed{\text{ア}}$，$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，

$\alpha-\dfrac{1}{\alpha}=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$，$\alpha^2-\dfrac{1}{\alpha^2}=\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$，$\alpha^5-\dfrac{1}{\alpha^5}=\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

問2 2次関数 $y=x^2-ax+3a$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最小値は，

$a<\boxed{\text{コサ}}$ のとき　$\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}a$，

$\boxed{\text{コサ}}\leqq a<\boxed{\text{セ}}$ のとき　$\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}a^2+\boxed{\text{ツ}}a$，

$\boxed{\text{セ}}\leqq a$ のとき　$\boxed{\text{テ}}+\boxed{\text{ト}}a$

である。

問3 $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=5$，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\mathrm{CA}=7$ である四面体OABCにおいて，点Oから平面ABCにおろした垂線をOHとする。このとき $\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

また，$\mathrm{OH}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヒフ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ であり，点Hは $\triangle\mathrm{ABC}$ の $\boxed{\text{ホ}}$ である。$\boxed{\text{ホ}}$ に入る単語として最も適切なものを，以下の選択肢の中から選べ。

⓪ 重心　① 垂心　② 内心　③ 外心　④ 傍心

（計算用紙）

$\boxed{2}$ 実数 a，b，c が，条件 $a^2+b^2=c^2$，$c>0$ を満たしながら変化するとき，直線 $\ell: ax+by+c=0$ 上の点 (x, y) が存在する領域について考える。次の各問いに答えよ。

問１（解法１）

ｉ） $y \neq 0$ のとき

$a^2+b^2=c^2$ の両辺に y^2 をかけ，$ax+by+c=0$ を代入すると

$$\boxed{\text{ア}}^2 \times y^2 + \left(-\boxed{\text{イ}}\,x-\boxed{\text{ウ}}\right)^2 = \boxed{\text{エ}}^2 \times y^2 \cdots\cdots (*)$$

となるので，$(*)$ を a について整理すると２次方程式として考えることができる。$(*)$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = \left(\boxed{\text{オ}}\,x\right)^2 - (x^2+y^2) \times \boxed{\text{カ}}^2\left(\boxed{\text{キ}} - y^2\right)$$

と表せ，a は実数より $\boxed{\text{ク}}$ を満たすため，求める領域は

$$x^2+y^2\,\boxed{\text{ケ}}\,\boxed{\text{コ}} \cdots\cdots (**)$$

の表す領域である。

$\boxed{\text{ク}}$ に入る数式として最も適切なものを，以下の選択肢の中から選べ。

⓪ $D>0$　① $D \geqq 0$　② $D=0$　③ $D<0$　④ $D \leqq 0$

$\boxed{\text{ケ}}$ に入る記号として最も適切なものを，以下の選択肢の中から選べ。

⓪ $>$　① $\geqq$　② $=$　③ $<$　④ $\leqq$

ⅱ） $y=0$ のとき，$ax+c=0$ となり $(**)$ を満たす。

問２（解法２）

直線 ℓ に直交し，かつ原点を通る直線 ℓ' は $\boxed{\text{サ}}\,x-\boxed{\text{シ}}\,y=0$ で表され，

２直線の交点 $\left(\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$ は原点から直線 ℓ におろした垂線と直線 ℓ との交点である。一方で，原点から直線 ℓ までの距離 d は

$$d = \frac{\left|\boxed{\text{テ}}\right|}{\sqrt{\boxed{\text{ト}}^2+\boxed{\text{ナ}}^2}} = \boxed{\text{ニ}}$$

と表せることより，直線 ℓ は原点を中心とする円に接する。よって，求める領域は

$$x^2+y^2\,\boxed{\text{ケ}}\,\boxed{\text{コ}}$$

の表す領域である。

問 3　条件を満たす実数 a，b について，直線 ℓ が第 3 象限を通らないための必要十分条件は

$$a\ \boxed{\text{ヌ}}\ \boxed{\text{ネ}}\ \text{かつ}\ b\ \boxed{\text{ノ}}\ \boxed{\text{ハ}}$$

である。$\boxed{\text{ヌ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$ に入る記号として最も適切なものを，以下の選択肢の中からそれぞれ選べ。

⓪ $>$　　① $\geqq$　　② $=$　　③ $<$　　④ $\leqq$

3　a を正の実数とするとき，3 次関数 $f(x)=x^3-3ax$ について考える。次の各問いに答えよ。

問 1　$f(x)$ は $x=-\sqrt{\boxed{ア}}$ のときに極大値 $\boxed{イウ}\sqrt{\boxed{エ}}$，

$x=\sqrt{\boxed{ア}}$ のときに極小値 $\boxed{オカキ}\sqrt{\boxed{ク}}$ をとる。

問 2　3 次方程式 $f(x)=k$ が異なる 2 つの実数解をとる k の値を k_1，$k_2\,(k_1<k_2)$ とし，方程式 $f(x)=k_1$ の実数解を α_1，$\beta_1\,(\alpha_1<\beta_1)$，方程式 $f(x)=k_2$ の実数解を α_2，β_2 $(\alpha_2<\beta_2)$ とそれぞれおくと，実数解の大小関係は $\boxed{ケ}$ となる。

$\boxed{ケ}$ に入る式として最も適切なものを，以下の選択肢の中から選べ。

⓪　$\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2$　　①　$\alpha_1<\alpha_2<\beta_1<\beta_2$

②　$\alpha_1<\alpha_2<\beta_2<\beta_1$　　③　$\alpha_2<\alpha_1<\beta_1<\beta_2$

④　$\alpha_2<\alpha_1<\beta_2<\beta_1$　　⑤　$\alpha_2<\beta_2<\alpha_1<\beta_1$

また，曲線 $y=f(x)$ と $y=k_1$ で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 $y=f(x)$ と $y=k_2$ で囲まれた部分の面積を S_2 とおくと，

$$S_1=\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}a^2,\quad S_1:S_2=\boxed{ス}:\boxed{セ}$$

である。

問 3　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3-3a^2)$ における接線 ℓ の方程式は

$y=\boxed{ソタ}\left(a-\boxed{チ}\right)x-\boxed{ツ}a^3$ であり，曲線 $y=f(x)$ と接線 ℓ が点 Q で交わるとき，点 Q の座標は $\left(\boxed{テトナ},\ f\left(\boxed{テトナ}\right)\right)$ である。

問 4　曲線 $y=f(x)$ と接線 ℓ で囲まれた部分の面積を S_3 とおくと，$a=\boxed{ニ}$ のとき $S_1=S_3$ となる。

（計算用紙）

$\boxed{4}$　2つの数列の和

$$S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots\cdots + (2n-1)^2,\quad T_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots\cdots + (2n)^2$$

について次の各問いに答えよ。ただし，問1～4 は結果のみを記述式解答用紙に答え，問5 は途中経過も記述せよ。

問1　S_n，T_n を n を用いて表せ。

問2　$S_n > 1000$ となる最小の n の値を求めよ。

問3　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{S_k}{k}$ を求めよ。

問4　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{S_k}$ を求めよ。

問5　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2$ を n を用いて表せ。

（計算用紙）

$\boxed{5}$ O を原点とする座標平面上に曲線 C：$y=\log(x+1)$ と点 A $(1,\ 0)$ がある。線分 OA を n 等分する点を，O に近い方から順に P_1，P_2，……，P_{n-1} とし，$\mathrm{P}_n=\mathrm{A}$ とする。点 $\mathrm{P}_k\,(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ の x 座標を x_k とし，直線 $x=x_k$ と C との交点を Q_k とする。

このとき，次の各問いに答えよ。ただし，問１ ～ 問４ は結果のみを記述式解答用紙に答え，問５ は途中経過も記述せよ。

問１ 曲線 C の概形をかけ。ただし，漸近線が存在する場合は，漸近線もかくこと。

問２ 不定積分 $\displaystyle\int x\log x\,dx$ を求めよ。

問３ Q_k における C の接線 ℓ_k の方程式を n，k を用いて表せ。

問４ ℓ_k と x 軸との交点を R_k とするとき，$\triangle\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{R}_k$ の面積 S_k を n，k を用いて表せ。

問５ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$ を求めよ。

（計算用紙）

（余　　白）

数学解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\textbf{ア}}$，$\boxed{\textbf{イウ}}$ などには，符号(−，±)又は数字(0～9)又は文字(a～d)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\textbf{アイウ}}$ に −83 と答えたいとき

ア	⊖	⊕	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d
イ	⊖	⊕	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d
ウ	⊖	⊕	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d

なお，同一の問題文中に $\boxed{\textbf{ア}}$，$\boxed{\textbf{イウ}}$ などが2度以上現れる場合，原則として，2度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\textbf{エオ}}}{\boxed{\textbf{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけません。

4　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\textbf{キ}}\sqrt{\boxed{\textbf{ク}}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

5　根号を含む分数形で解答する場合，例えば，$\dfrac{\boxed{\textbf{ケ}}+\boxed{\textbf{コ}}\sqrt{\boxed{\textbf{サ}}}}{\boxed{\textbf{シ}}}$ に $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\dfrac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけません。

6　比を答える場合，一番小さい自然数の比で答えなさい。

例えば，$\boxed{\textbf{ス}}$: $\boxed{\textbf{セソ}}$ に 2 : 13 と答えるところを，4 : 26 や 6 : 39 のように答えてはいけません。