

一般-数学（理系学部）正答例

大問番号	設問番号	正答
1	ア	5
1	イ	4
1	ウ	7
1	エ	3
1	オ	2
1	カ	1
1	キ	2
1	ク	9
1	ケ	3
1	コ	-
1	サ	2
1	シ	1
1	ス	4
1	セ	2
1	ソ	-
1	タ	1
1	チ	4
1	ツ	3
1	テ	1
1	ト	2
1	ナ	-
1	ニ	1
1	ヌ	2
1	ネ	7
1	ノ	3
1	ハ	3
1	ヒ	7
1	フ	8
1	ヘ	3
1	ホ	3

大問番号	設問番号	正答
2	ア	a
2	イ	a
2	ウ	c
2	エ	c
2	オ	c
2	カ	c
2	キ	1
2	ク	1
2	ケ	1
2	コ	1
2	サ	b
2	シ	a
2	ス	-
2	セ	a
2	ソ	c
2	タ	-
2	チ	b
2	ツ	c
2	テ	c
2	ト	a
2	ナ	b
2	ニ	1
2	ヌ	4
2	ネ	0
2	ノ	4
2	ハ	0

大問番号	設問番号	正答
3	ア	a
3	イ	2
3	ウ	a
3	エ	a
3	オ	-
3	カ	2
3	キ	a
3	ク	a
3	ケ	1
3	コ	2
3	サ	7
3	シ	4
3	ス	1
3	セ	1
3	ソ	3
3	タ	a
3	チ	1
3	ツ	2
3	テ	-
3	ト	2
3	ナ	a
3	ニ	1

4

2つの数列の和

$$S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2, \quad T_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2$$

について次の各問いに答えよ。

問1 S_n, T_n を n を用いて表せ。

問2 $S_n > 1000$ となる最小の n の値を求めよ。

問3 $\sum_{k=1}^{10} \frac{S_k}{k}$ を求めよ。

問4 $\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{S_k}$ を求めよ。

問5 $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2$ を n を用いて表せ。

問1 $S_n = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1), \quad T_n = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

問2 10

問3 510

問4 $\frac{10}{7}$

問5 i) $n = 2m$ のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} k^2 &= S_m - T_m = \frac{1}{3}m(2m-1)(2m+1) - \frac{2}{3}m(m+1)(2m+1) \\ &= -m(2m+1) = -\frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

ii) $n = 2m-1$ のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^{k+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} k^2 + (2m)^2 = -m(2m+1) + 4m^2 \\ &= 2m^2 - m = \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

以上から, $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$

- 5 O を原点とする座標平面上に曲線 $C: y = \log(x+1)$ と点 $A(1, 0)$ がある。線分 OA を n 等分する点を、O に近い方から順に $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ とし、 $P_n = A$ とする。点 $P_k (k=1, 2, \dots, n)$ の x 座標を x_k とし、直線 $x = x_k$ と C との交点を Q_k とする。このとき、次の各問いに答えよ。

問1 曲線 C の概形をかけ。ただし、漸近線が存在する場合は、漸近線もかくこと。

問2 不定積分 $\int x \log x dx$ を求めよ。

問3 Q_k における C の接線 ℓ_k の方程式を n, k を用いて表せ。

問4 ℓ_k と x 軸との交点を R_k とするとき、 $\triangle P_k Q_k R_k$ の面積 S_k を n, k を用いて表せ。

問5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ を求めよ。

解説

問1 右図

問2 $\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C$

問3 $y = \frac{n}{n+k} x - \frac{k}{n+k} + \log \frac{n+k}{n}$

問4 $\frac{1}{2} \cdot \frac{n+k}{n} \left(\log \frac{n+k}{n} \right)^2$

問5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \left\{ \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right\}^2$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x+1) \{ \log(x+1) \}^2 dx$$

$t = x+1$ とおくと

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 t (\log t)^2 dt = \frac{1}{4} \left[t^2 (\log t)^2 \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 t \log t dt$$

$$= (\log 2)^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{1}{4} t^2 \right]_1^2 = (\log 2)^2 - \log 2 + \frac{3}{8}$$

